単位開円板からGleason Part上への解析写像について (Function Algebraとその応用)

貴志, 一男

数理解析研究所講究録
206巻 1974年 159-174

単位開円板から Gleason part 上への解析写像について

和歌山大 教育　貴志 一男

§1. 序

A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra，$M(A)$ を A の maximal ideal space，$\hat{f}$ を $f\ (\in A)$ の Gelfand transform とする．$M(A)$ の二点 φ，θ に対して

(1.1)　$G(\varphi,\theta) = \sup\{|\varphi(f)-\theta(f)|\ ;\ f\in A,\ \|f\|\leqq 1\}$

(1.2)　$\sigma(\varphi,\theta) = \sup\{|\varphi(f)|\ ;\ f\in A,\ \|f\|\leqq 1,\ \theta(f)=0\}$

とおく．ただし $\|f\| = \sup\{|f(x)|\ ;\ x\in X\}$ である．いま，$G(\varphi,\theta) < 2$ ($\Leftrightarrow \sigma(\varphi,\theta)<1$) のとき，$\varphi\sim\theta$ と定義すると，$\sim$ は $M(A)$ 上の同値関係である (Gleason [3])．$P(m) = \{\varphi\ ;\ \varphi\in M(A),\ \varphi\sim m\}$ ($\supsetneqq \{m\}$) を $m\ (\in M(A))$ の (non-trivial) Gleason part という．以下 m の表現測度は一意的（即ち，$m(f)=\int f d\mu_m$ ($\forall f\in A$) となる X 上の確率測度 μ_m は一意的）でかつ $P(m)\supsetneqq\{m\}$ と仮定する．

いま $P(m)$ を Gelfand topology をもつ $M(A)$ の部分空間と

考えたとき，複素平面上の単位開円板Dから $P(m)$ 上への1対1の連続写像 $\rho(t)$ が解析写像であるというのは，任意の $f(\in A)$ に対して $\hat{f}(\rho(t))$ がDで正則であることと定義する．このような解析写像 $\tau(t)$ の存在することは知られている（Wermer's embedding theorem）．

こゝでの目的は

(1) 任意の解析写像 $\rho(t)$ は $\tau(t)$ を用いて表わされることを示すこと（§3，定理A）

(2) 任意の解析写像 $\rho(t)$ に対して $\sigma(\rho(t), \rho(s)) = \sigma(t, s)$ $(\forall t, s \in D)$ となることを示すこと，ただし $\sigma(t,s) = \left|\frac{t-s}{1-\bar{s}t}\right|$ である（§4，定理B）

(3) 任意の解析写像 $\rho(t)$ に対して $\rho(t)$ が同相写像である条件を求めること（§5，定理C）である．（cf. Kishi [6]，[7]）

§2．準備

m $(\in M(A))$ の表現測度が一意的のときは，m の Gleason part $P(m)$ に属する任意の点 φ の表現測度も一意的である．よって便宜上 φ の表現測度も φ で表わすことにする．$A_m = \{f;\ f \in A,\ m(f) = 0\}$ とする．A，A_m の $L^p(m)$ 閉包（$p = \infty$ のときは weak-star 閉包）をそれぞれ $H^p(m)$，H^p_m とかく．絶対値が1である $H^\infty(m)$ の関数を inner function という．

<u>定理 2.1</u> (Wermer's embedding theorem) A を compact space X 上の uniform algebra とする。$m\ (\in M(A))$ の表現測度は一意的で，m の Gleason part $P(m)$ は non-trivial であるとすると，次の事が成立する。

(i) $ZH^\infty(m) = H^\infty_m$ をみたす inner function Z (Wermer embedding function) が存在する。

(ii) $\varphi \in P(m)$ に対して $\hat{Z}(\varphi) = \int Z\, d\varphi$ と定義すると，$\hat{Z}$ は $P(m)$ から単位開円板 D 上への 1 対 1 の写像で，$\tau = \hat{Z}^{-1}$ は D から $P(m)$ 上への 1 対 1 の連続写像である。

(iii) $\forall f \in A$ に対して，$\hat{f}(\tau(t))$ は D で正則である。(cf. Wermer [9], Gamelin [2], p. 158)

$\varphi \in P(m)$ とすると $\varphi(f) = \int f\, d\varphi = \int f\, h\, dm$ $(\forall f \in A)$ となる関数 $h \in L^\infty(m)$ が存在する。従って φ は multiplicative で weak-star continuous である $H^\infty(m)$ の線形汎関数に一意的に拡張出来る。この拡張した線形汎関数を $\tilde{\varphi}$ で示すと $\tilde{\varphi}(f) = \int f\, d\varphi = \int f\, h\, dm$ $(\forall f \in H^\infty(m))$ となる。この $\tilde{\varphi}$ を $\varphi \in P(m)$ の <u>measure extension</u> という。

<u>命題 2.2</u> A, m, $P(m)$, Z は定理 2.1 に表われたものとする。$P(m)$ に属する φ の measure extension $\tilde{\varphi}$ からなる集合を $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\tilde{m})$ とする。このとき次の事が成立する。

(i) $\mathcal{P}$ は $M(H^\infty(m))$ における $\tilde{m}$ の non-trivial Gleason part である．

(ii) $\hat{z}|\wp$ は $\wp$ (with Gelfand topology) から単位閉円板 D 上への1対1の連続写像であるから，$\tilde{\tau} = (\hat{z}|\wp)^{-1}$ は D から $\wp$ 上への同相写像である．

証略

§3．解析写像 $\rho(t)$ の決定

<u>定理 A</u>．A を compact space X 上の uniform algebra とする．m ($\in \mathcal{M}(A)$) の表現測度は一意的で，m の Gleason part $P(m)$ は non-trivial であるとする．$\tau(t)$ を定理 2.1 に表われた解析写像とする．$\rho(t)$ を D から $P(m)$ 上への解析写像で $\rho(\alpha) = m$ であるとする．そうすると

(3.1) $$\rho(t) = \tau\left(\beta \frac{t-\alpha}{1-\bar{\alpha}t}\right)$$

となる．ここで β は絶対値が 1 の定数である．

更に，$\tau(t)$ が同相写像であることと $\rho(t)$ が同相写像であることは同値である．

証明．$\wp$，Z，$\tilde{\tau}$ を定理 2.1 と命題 2.2 に表われたものとする．D の任意の点 t に対して $\rho(t)$ の（一意的な）表現測度を $h_t dm$ ($h_t \in L^\infty(m)$) とする．また $\tilde{\rho}(t)$ を $\rho(t)$ の measure extension とする．すなわち，$\tilde{\rho}(t)(f) = \int f h_t dm$ ($\forall f \in H^\infty(m)$) とする．このとき，$\tilde{\rho}(t)$ は D から $\wp(\tilde{m})$ 上への analytic map

であることを示す．各 $f\ (\in H^\infty(m))$ に対して A における列 $\{f_n\}$ が存在して，$\|f_n\| \leqq \|f\|\ (\forall n)$ かつ $f_n \to f$ a.e. (dm) となる (Hoffman-Wermer theorem, cf. Browder [1], theorem 4.2.5). 従って，Lebesgue の収束定理から，$\rho(t)(f_n) = \int f_n h_t\, dm \longrightarrow \tilde{\rho}(t)(f) = \int f h_t\, dm$ $(\forall t \in D)$ となる．一方仮定から $\rho(t)(f_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は D において正則でありかつ $|\rho(t)(f_n)| \leqq \|f_n\| \leqq \|f\|$ であるから，$\tilde{\rho}(t)(f)$ $(\forall f \in H^\infty(m))$ は D において正則である．(Vitali's theorem) よって，$\tilde{\rho}(t)$ は D から $\mathfrak{P}$ 上への analytic map である．いま，$f(t) = \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{\rho}(t)) = \hat{Z}(\tilde{\rho}(t))$ とおくと，$f(t)$ は D から D 上への1対1の正則写像でかつ $f(\alpha) = 0$ であるので $f(t) = \beta \dfrac{t-\alpha}{1-\bar{\alpha}t}$ となる．ただし β は $|\beta| = 1$ なる定数である．従って，$\tilde{\tau}(\beta \dfrac{t-\alpha}{1-\bar{\alpha}t}) = \tilde{\rho}(t)$ となる．$\tilde{\tau}(t)|A = \tau(t)$ で $\tilde{\rho}(t)|A = \rho(t)$ であるから

$$\tau(\beta \frac{t-\alpha}{1-\bar{\alpha}t}) = \rho(t)$$

を得る．

次に，$\tau(t)$ が同相写像であることと $\rho(t)$ が同相写像であることは同値であることを示す．いま，$L_\alpha(t) = \dfrac{t+\alpha}{1+\bar{\alpha}t}$，$\beta = e^{i\theta}$ とおく．そうすると，$\tau(t)$ は同相写像 $\Leftrightarrow$ $\hat{Z}(\varphi) (= \int Z\, d\varphi)$ は $P(m)$ から D 上への連続写像 $\Leftrightarrow$ $L_\alpha \circ e^{-i\theta} \circ \hat{Z}$ は $P(m)$ から D 上への連続写像 $\Leftrightarrow$ $(L_\alpha \circ e^{-i\theta} \circ \hat{Z})^{-1}(t) = \tau(e^{i\theta} L_{-\alpha}(t)) = \tau(e^{i\theta} \dfrac{t-\alpha}{1-\bar{\alpha}t}) = \rho(t)$ は同相写像．　　（証明終）

§4. 解析写像 $\rho(t)$ が等距離写像であること

次の結果は Hoffman [5], p. 105 の式 (6.12) を一般化したものである.

<u>定理 B.</u> A を compact space X 上の uniform algebra とする. m ($\in M(A)$) の表現測度は一意的で, m の Gleason part $P(m)$ は non-trivial であるとする. $\rho(t)$ を D から $P(m)$ 上への解析写像であるとする. そうすると,

$$(4.1)\qquad \sigma(\rho(t), \rho(s)) = \sigma(t, s)$$

$$(4.2)\qquad G(\rho(t), \rho(s)) = G(t, s)$$

である. ただし, $G(t, s)$ は $A(D)$ を disk algebra とするとき $G(t, s) = \sup\{|f(t) - f(s)| : f \in A(D), \|f\| \leqq 1\}$ で定義されたものである.

証明. Z, $\wp$, τ, $\tilde{\tau}$ は定理 2.1 と命題 2.2 に表われたものとする. $\tilde{\tau}(t) = \tilde{\varphi}$, $\tilde{\tau}(s) = \tilde{\theta}$, $\tau(t) = \varphi$, $\tau(s) = \theta$ とする.

$f \in H^\infty_{\tilde{\theta}} = \{f : f \in H^\infty(m), \tilde{\theta}(f) = \int f\,d\theta = 0\} \Leftrightarrow f \in (Z-s)H^\infty(m)$ (Browder [1], Lemma 4.4.4 から). これから $H^\infty_{\tilde{\theta}} = \dfrac{Z-s}{1-\bar{s}Z} H^\infty(m)$ を得る. そうすると

$$\begin{aligned}
\sigma(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) &= \sup\{|\tilde{\varphi}(f)| : f \in H^\infty(m), \|f\| \leqq 1, \tilde{\theta}(f) = 0\} \\
&= \sup\left\{|\tilde{\varphi}(f)| : f \in \frac{Z-s}{1-\bar{s}Z} H^\infty(m), \|f\| \leqq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\tilde{\varphi}\left(\frac{Z-s}{1-\bar{s}Z}\right)\tilde{\varphi}(g)\right| ; g \in H^\infty(m), \|g\| \leqq 1\right\} \\
&= \left|\tilde{\varphi}\left(\frac{Z-s}{1-\bar{s}Z}\right)\right| = \left|\frac{t-s}{1-\bar{s}t}\right| = \sigma(t, s).
\end{aligned}$$

一方，Browder [1], p. 134 から

$$\sigma(\varphi,\theta) = \sup\{|\varphi(f)| : f\in A,\ \|f\|\leqq 1,\ \theta(f)=0\}$$
$$= \sup\{|\varphi(f)| : f\in A,\ \int|f|^2 d\varphi \leqq 1,\ \theta(f)=0\}$$
$$= \sup\{|\varphi(f)| : f\in H^2_\theta,\ \int|f|^2 d\varphi\leqq 1\}$$

ただし，$H^2_\theta = \{f : f\in H^2(m),\ \int f\,d\theta = 0\}$ である。また，

$$\sigma(\tilde\varphi,\tilde\theta) = \sup\{|\tilde\varphi(f)| : f\in H^\infty_{\tilde\theta},\ \|f\|\leqq 1\}$$
$$= \sup\{|\tilde\varphi(f)| : f\in H^\infty_{\tilde\theta},\ \int|f|^2 d\varphi \leqq 1\}$$
$$= \sup\{|\varphi(f)| : f\in H^2_\theta,\ \int|f|^2 d\varphi \leqq 1\}$$

$$\therefore\ \sigma(\tau(t),\tau(s)) = \sigma(\tilde\tau(t),\tilde\tau(s)) = \sigma(t,s)$$

定理Aから，$\rho(t)$ は D から $P(m)$ 上への解析写像であると，

$\rho(t) = \tau(\beta\frac{t-\alpha}{1-\bar\alpha t})$（ただし，$\beta$ は $|\beta|=1$ なる定数である）.

よって，

$$\sigma(\rho(t),\rho(s)) = \sigma(\tau(\beta\tfrac{t-\alpha}{1-\bar\alpha t}),\ \tau(\beta\tfrac{s-\alpha}{1-\bar\alpha s})) = \sigma(t,s)$$

を得る．最後に，König [8] によって証明された次の等式

$$2\log\frac{2+G(\varphi,\theta)}{2-G(\varphi,\theta)} = \log\frac{1+\sigma(\varphi,\theta)}{1-\sigma(\varphi,\theta)}$$

から $G(\rho(t),\rho(s)) = G(t,s)$ を得る．　　　　証明終.

§5. 解析写像 $\rho(t)$ が同相写像になるための条件

定理Bから，$t, s\in D$ に対して

(5.1)　$\sigma(\tau(t),\tau(s)) = \sigma(\tilde\tau(t),\tilde\tau(s)) = |\tilde\varphi(\frac{Z-t}{1-\bar t Z})| = \sigma(t,s)$, (5.2) $\sigma(m, \tau(\lambda)) = \sigma(\tilde{m}, \tilde{\tau}(\lambda)) = |\tilde{\varphi}(Z)| = \sigma(0, \lambda)$

ただし, $\tilde{\tau}(\lambda) = \tilde{\varphi}$ とする. 従って, $\mathcal{P} \subset \{\Phi ;\ \Phi \in \mathcal{M}(H^\infty(m))$ $|\Phi(Z)| < 1\}$ となる. 一方, 定理 2.1 の (i) を用いて, もし $\Phi \in \mathcal{M}(H^\infty(m)) - \mathcal{P}$ ならば

$$\begin{aligned} 1 &= \sup\{|\Phi(f)| ;\ f \in H^\infty(m),\ \|f\| \leqq 1,\ \tilde{m}(f) = 0\} \\ &= \sup\{|\Phi(Z)\Phi(g)| :\ g \in H^\infty(m),\ \|g\| \leqq 1\} \\ &= |\Phi(Z)| \end{aligned}$$

よって,

(5.3) $\mathcal{P} = \{\Phi ;\ \Phi \in \mathcal{M}(H^\infty(m)),\ |\Phi(Z)| < 1\}$

となり, $\mathcal{P}$ は $\mathcal{M}(H^\infty(m))$ の開集合である.

$\mathcal{M}(H^\infty(m)) \ni \Phi$ に Φ の A 上への制限を対応さす写像を π で示す. 即ち $\pi\Phi = \Phi|A$ である. そうすると π は $\mathcal{M}(H^\infty(m))$ から $\mathcal{M}(A)$ への連続写像で, $\pi\mathcal{P} = P$, $\pi\bar{\mathcal{P}} = \bar{P}$ である. ただし, $\bar{\mathcal{P}}$, $\bar{P}$ はそれぞれ $\mathcal{M}(H^\infty(m))$, $\mathcal{M}(A)$ における集合 $\mathcal{P}$, P の閉包である.

<u>定理C</u> A を compact space X 上の uniform algebra とする. $m\ (\in \mathcal{M}(A))$ の表現測度は一意的で, m の Gleason part P は non-trivial であるとする. $\mathcal{P}$, Z, τ, $\tilde{\tau}$ は定理 2.1 と命題 2.2 に表われたものとする. 部分空間 P, $\mathcal{P}$ はそれぞれ $\mathcal{M}(A)$, $\mathcal{M}(H^\infty(m))$ 上の Gelfand topology から導入された topology をもっているものとする. このとき次の命題 (i) ~ (vi

は同値である，

(i) $\tau(t)$ は D から部分空間 P 上への同相写像である．

(i)′ (任意の)解析写像 $\rho(t)$ は D から部分空間 P 上への同相写像である．

(ii) $\pi_1\ (=\pi|\mathcal{S})$ は部分空間 $\mathcal{S}$ から部分空間 P 上への同相写像である．

(iii) 部分空間 P の任意の点 φ に対して，P における φ のある相対近傍 $V(\varphi)$ とある正定数 c が存在して $V(\varphi)\subset\{\theta;\ \theta\in M(A),\ \sigma(m,\theta)\leqq c<1\}$ となる．

(iv) 部分空間 P の任意の φ に対して，$\pi\Phi=\varphi$ となる Φ は $\bar{\mathcal{S}}$ 内にただ一つだけ存在する．ただし $\bar{\mathcal{S}}$ は $M(H^\infty(m))$ における集合 $\mathcal{S}$ の閉包である．

(v) (a) 部分空間 P にある点 φ と φ のある相対近傍 $V(\varphi)$ が存在して，$V(\varphi)$ の相対閉包 $\overline{V(\varphi)}$ は compact になる．

(b) U_1，U_2 を部分空間 P における同相な部分集合で，U_1 は P における相対開集合ならば，U_2 も P における相対開集合である．

(vi) 任意の $r\ (0<r<1)$ に対して，$M(A)$ における $\{\theta;\ r<\sigma(m,\theta)<1\}$ の閉包は $\{\theta;\ \theta\in\bar{P},\ \sigma(m,\theta)\geqq r\}$ に含まれる．ただし，$\bar{P}$ は $M(A)$ における集合 P の閉包である．

(vii) 部分空間 P の任意の点 φ に対して，φ のある相対近

傍 $V(\varphi)=\{\varphi_\mu : \mu\in M\}$ とある正定数 k が存在して，$1/k \leqq h_\mu \leqq k$ (for $\forall\mu\in M$) となる．ただし φ_μ の表現測度を $\{h_\mu dm\}$ とする．

(viii) 部分空間 P の任意の点 φ に対して，φ のある相対開近傍 $V(\varphi)=\{\varphi_\mu : \mu\in M\}$ が存在して，$\{h_\mu : \mu\in M\}\ (\subset L^1(m))$ は一様積分可能である．ただし φ_μ の表現測度を $\{h_\mu dm\}$ とする．

証明

$$
\begin{tikzcd}
 & & (i) \arrow[r, leftrightarrow, "定理A"] \arrow[d, leftrightarrow, "1"] & (i)' \\
(vi) \arrow[dr, leftrightarrow, "6"] & (v) \arrow[r, leftrightarrow, "5"] & (ii) \arrow[d, "2"] & (viii) \arrow[l, "9"'] \\
 & (iv) \arrow[ur, "4"] & (iii) \arrow[l, "3"'] \arrow[r, "7"] & (vii) \arrow[u, "8"']
\end{tikzcd}
$$

Step 1, (i) $\Leftrightarrow$ (ii).　$\pi_1(\tilde\tau(t))=\tau(t)$ (for $\forall t\in D$) で，$\tilde\tau$ は D から $\mathcal{P}$ 上への同相写像であるから (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を得る．

Step 2, (ii) $\Rightarrow$ (iii).　$\forall\tilde\varphi\in\mathcal{P}$ に対して，$V_\varepsilon(\tilde\varphi)=\{\tilde\theta;\sigma(\tilde\varphi,\tilde\theta)<\varepsilon<1\}$ $(\subset\mathcal{P})$ は $\mathcal{M}(H^\infty(m))$ における開集合であり，$\{V_\varepsilon(\tilde\varphi);0<\varepsilon<1\}$ は部分空間 $\mathcal{P}$ における $\tilde\varphi$ の基本近傍系である．$\tilde\theta\in V_\varepsilon(\tilde\varphi)$ のとき $\tilde\varphi=\tilde\tau(t_1)$, $\tilde\theta=\tau(t)$ となる $t_1, t\ (\in D)$ が存在する．D ではある正定数 c が存在して，$\{t;\sigma(t_1,t)<\varepsilon<1\}\subset\{t;\sigma(0,t)<c<1\}$ となる．従って (5.1) より $\{\tilde\tau(t);\sigma(\tilde\tau(t_1),\tilde\tau(t))<\varepsilon<1\}\subset\{\tilde\tau(t);\sigma(\tilde\tau(0),\tilde\tau(t))<c<1\}$，故に

(5.4)　$V_\varepsilon(\tilde\varphi)\subset\{\tilde\theta;\sigma(\tilde m,\tilde\theta)<c<1\}$

となる．

さて，π_1^{-1} は $\varphi\ (\in P)$ で連続で，$\pi_1\tilde\varphi=\varphi$ であるから，$\tilde\varphi$

の任意の近傍$V_\varepsilon(\tilde{\varphi})$に対して部分空間Pにおける$\varphi$の開近傍$V(\varphi)$が存在して，$\pi_1^{-1}(V(\varphi)) \subset V_\varepsilon(\tilde{\varphi})$となる．(5.1)と(5.4)から　$V(\varphi) \subset \{\theta;\ \sigma(m,\theta) \leqq c < 1\}$となる定数$c$が存在する．

Step 3, (iii) ⇒ (iv)．(対偶を証明する) P内にある一点φと$\partial\mathfrak{P} = \bar{\mathfrak{P}} - \mathfrak{P}$にある点$\Phi$が存在して$\pi\Phi = \varphi$となったとする．部分空間Pにおける$\varphi$の任意の開近傍$V(\varphi)$に対して部分空間$\bar{P}$における$\varphi$の開近傍$W(\varphi)$が存在して，$V(\varphi) = W(\varphi) \cap P$となる．いま$\pi|\bar{\mathfrak{P}} = \pi_2$とおくと$\pi_2$は$\bar{\mathfrak{P}}$から$\bar{P}$上への連続写像であるから，部分空間$\bar{\mathfrak{P}}$内に$\Phi$の開近傍$V(\Phi)$が存在して$\pi_2 V(\Phi) \subset W(\varphi)$となる．$\Phi \in \bar{\mathfrak{P}}$からある net $\{\tilde{\varphi}_j\}(\subset \mathfrak{P} \cap V(\Phi))$が存在して，$\tilde{\varphi}_j(f) \to \Phi(f)$　$(\forall f \in H^\infty(m))$　となる．特に$\tilde{\varphi}_j(Z) \to \Phi(Z)$．(5.2)と(5.3)から$\sigma(\tilde{m}, \tilde{\varphi}_j) = |\tilde{\varphi}_j(Z)|$　かつ$|\Phi(Z)| = 1$　であるから，$\sigma(\tilde{m}, \tilde{\varphi}_j) \to 1$．(5.1)から$\sigma(\tilde{m}, \tilde{\varphi}_j) = \sigma(m, \varphi_j)$かつ$\pi_2 \tilde{\varphi}_j = \varphi_j \in P \cap W(\varphi) = V(\varphi)$であるから，$\sup\{\sigma(m,\theta);\ \theta \in V(\varphi)\} = 1$．これは(iii)に反する．

Step 4, (iv) ⇒ (ii)．(対偶を証明する) π_1^{-1}はPのある点φにおいて連続でなかったとする．そうするとある net $\{\varphi_j\}(\subset P)$が存在して，$\varphi_j \to \varphi$であるが$\tilde{\varphi}_j$は$\tilde{\varphi}$に収束しない．$\bar{\mathfrak{P}}$は$M(H^\infty(m))$の compact subset で，$\{\tilde{\varphi}_j\} \subset \bar{\mathfrak{P}}$であるから，$\{\tilde{\varphi}_j\}$の部分 net $\{\tilde{\varphi}_{j(k)}\}$が存在して$\tilde{\varphi}_{j(k)} \to \Phi\ (\in \bar{\mathfrak{P}})$で$\Phi \neq \tilde{\varphi}$と出来る．そうすると，$\varphi_{j(k)}(f) = \tilde{\varphi}_{j(k)}(f) \to \varphi(f) = \Phi(f)$　$(\forall f \in A)$．従って，$\Phi \in \partial\mathfrak{P}$かつ

$\pi\Phi=\varphi$．これは(iv)に反する．

注意　上の証明から，Pのある点φにおいて命題(iii)の条件が満足されているとき，π_1^{-1}はφにおいて連続になる．逆も真である．

Step 5, (ii)⇔(v)．先ず(ii)⇒(v)を示す．若しW_1, W_2がDの同位相な部分集合で，W_1がDの開集合ならばW_2もDの開集合である（Browerの領域不変の定理）．また(i)⇔(ii)からτはDからP上への同相写像である．これらの事から(ii)⇒(v)が従う．

次に(v)⇒(ii)を示す．部分空間Pにある点φとφのある(相対的)開近傍$V(\varphi)$が存在して，$V(\varphi)$の相対閉包$\overline{V(\varphi)}$はcompactであると仮定する．$V(\varphi)$はcompact subspace $\overline{V(\varphi)}$の開集合であるから，部分空間$V(\varphi)$はlocally compactである．

いま，$\pi_1^{-1}(V(\varphi))=\mathcal{S}\ (\subset\mathcal{P})$とおく．$\mathcal{S}\subset\bigcup\{V_\varepsilon(\tilde\varphi);\tilde\varphi\in\mathcal{S}\}$（ただし，$V_\varepsilon(\tilde\varphi)=\{\tilde\theta;\rho(\tilde\varphi,\tilde\theta)<\varepsilon, 0<\varepsilon<1\}$とする．そうすると，$\tilde\tau^{-1}(V_\varepsilon(\tilde\varphi))$はDのopen setで，$\tilde\tau^{-1}(\mathcal{S})\subset\bigcup\{\tilde\tau^{-1}(V_\varepsilon(\tilde\varphi));\tilde\varphi\in\mathcal{S}\}$となるから，$\mathcal{S}$中に可算個の集合$\{\tilde\varphi_1,\tilde\varphi_2,\cdots,\tilde\varphi_n,\cdots\}$が存在して，$\tilde\tau^{-1}(\mathcal{S})\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\tilde\tau^{-1}(V_\varepsilon(\tilde\varphi_n))$となる（Lindelöfの被覆定理）．従って，$\mathcal{S}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}V_\varepsilon(\tilde\varphi_n)$，故に$V(\varphi)=\pi_1(\mathcal{S})\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\pi_1V_\varepsilon(\tilde\varphi_n)$ $=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_\varepsilon(\varphi_n)$（ただし$V_\varepsilon(\varphi_n)=\{\theta:\rho(\varphi_n,\theta)<\varepsilon\}$）．そうすると，

$V(\varphi)=\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ （ただし $S_n = V(\varphi)\cap V_\varepsilon(\varphi_n)$）. $V(\varphi)$ は locally compact subspace であるから，ある S_{n_0} が存在して部分空間 $V(\varphi)$ における S_{n_0} の閉包 $\overline{S_{n_0}}$ の開核 W は空でない（Baire の定理）.

$\{\theta : \sigma(\varphi_n, \theta) \leqq \varepsilon\}$ は $\mathcal{M}(A)$ における compact 集合であるから $\overline{S_{n_0}} \subset V(\varphi)\cap\{\theta : \sigma(\varphi_n, \theta)\leqq\varepsilon\}$ となる．よって $W\subset V(\varphi)\cap\{\theta:\sigma(\varphi_n,\theta)\leqq\varepsilon\}$. W は部分空間 $V(\varphi)$ の開集合で，$V(\varphi)$ は部分空間 P の開集合であるから，W は部分空間 P の開集合になる．それからある正の定数 c が存在して $W\subset\{\theta:\sigma(\varphi_n,\theta)\leqq\varepsilon\}\subset\{\theta:\sigma(m,\theta)\leqq c<1\}$ （(5.4) を参照）となる．よって，上の注意から，π_1^{-1} は W において連続になる．故に，写像 π_1 は部分空間 $\mathcal{P}$ の開集合 $\pi_1^{-1}(W)$ から部分空間 P の開集合 W 上への同相写像である．

$\pi_1^{-1}(W)$ の点 $\tilde{\varphi}_1$ に対してある正定数 η $(0<\eta<1)$ が存在して，$\{\tilde{\theta};\sigma(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\theta})\leqq\eta\}\subset\pi_1^{-1}(W)$ と出来る．そうすると，写像 π_1 は部分空間 $\mathcal{P}$ における compact 集合 $\{\tilde{\theta}:\sigma(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\theta})\leqq\eta\}$ と開集合 $\{\tilde{\theta}:\sigma(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\theta})<\eta\}$ をそれぞれ部分空間 P における compact 集合 $\{\theta:\sigma(\varphi_1,\theta)\leqq\eta\}$ と開集合 $\{\theta:\sigma(\varphi_1,\theta)<\eta\}$ に写像する．

次に，$\tilde{\varphi}_2$ を $\mathcal{P}$ の任意の点とすると，命題 2.2 と (5.1) から，$\{\tilde{\theta}:\sigma(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\theta})\leqq\eta\}$，$\{\tilde{\theta}:\sigma(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\theta})<\eta\}$ をそれぞれ $\{\tilde{\theta}:\sigma(\tilde{\varphi}_2,\tilde{\theta})\leqq\eta\}$，$\{\tilde{\theta}:\sigma(\tilde{\varphi}_2,\tilde{\theta})<\eta\}$ 上に写す同相写像 κ を見つけることが出来る．

一方 $\{\tilde{\theta}:\sigma(\tilde{\varphi}_2,\tilde{\theta})\leqq\eta\}$ は $\mathcal{P}$ の compact 集合で，$\{\theta:\sigma(\varphi_2,\theta)$

$\leqq \eta\}$ は P の compact Hausdorff subspace であるから π_1 は $\{\tilde{\theta}: \sigma(\tilde{\varphi}_2, \tilde{\theta}) \leqq \eta\}$ から $\{\theta: \sigma(\varphi_2, \theta) \leqq \eta\}$ 上への同相写像である.

さて, $T = \pi_1 \circ K \circ \pi_1^{-1}$ とおく. T は $\{\theta: \sigma(\varphi_1, \theta) \leqq \eta\}$ から $\{\theta: \sigma(\varphi_2, \theta) \leqq \eta\}$ 上への同相写像であり, 従って, T は $\{\theta: \sigma(\varphi_1, \theta) < \eta\}$ から $\{\theta: \sigma(\varphi_2, \theta) < \eta\}$ 上への同相写像である. $\{\theta: \sigma(\varphi_1, \theta) < \eta\}$ は部分空間 P の開集合であったから $V_\eta(\varphi_2) = \{\theta: \sigma(\varphi_2, \theta) < \eta\}$ も部分空間 P の開集合である. ((v) の仮定 (b) を使用した.) よって正数 c が存在して $V(\varphi_2) \subset \{\theta: \sigma(m, \theta) \leqq c < 1\}$ ((5.4) を参照) となるから, 上の注意より, π_1^{-1} は φ_2 で連続になる.

Step 6. ~ Step 9 の証明は省略する.

系 $P(m)$ は定理 C の仮定を満足するものとする. 若し, $P(m)$ は locally euclidean であるならば, $P(m)$ は単位開円板 D と同位相である.

証明. 定理 C の (v) から従う.

例. X をトーラス, すなわち二つの単位円の積とする. また α を正の無理数とする. A を X 上の連続関数で, その Fourier 級数は

$$f(\theta, \varphi) \sim \sum_{n+m\alpha \geqq 0} c_{mn}\, e^{im\theta} e^{in\theta}$$

となるものとする．そうすると A は X 上の dirichlet algebra である．(Cf. Wermer [10].)

いま $M'=\{(z,w)\,;\,(z,w)\in\mathbb{C}^2,\ |w|=|z|^{\alpha},\ |z|,|w|\leqq 1\}$ とすると，$\mathcal{M}(A)$ と M' を同一視出来る．b を一つの実数とすると，analytic surface $S_b:\ w=e^{ib}z^{\alpha},\ 0<|z|<1$ は non-trivial Gleason part で，S_b は Gelfand topology をもった $\mathcal{M}(A)$ で dense である．S_b から一点 m をとり固定する．いま，

$A=\{\varphi\,;\ \sigma(m,\varphi)\leqq r\}$，$B=\{\varphi\,;\ r<\sigma(m,\varphi)<1\}$，$S_b=A\cup B$

とする．そうすると $\mathcal{M}(A)=\overline{S_b}=\overline{A}\cup\overline{B}=A\cup\overline{B}$ となり，従って $\overline{B}\supset S_{b'}$ となる（$S_{b'}$ は S_b と異なる analytic surface，$Y\subset\mathcal{M}(A)$ に対して $\overline{Y}$ は Y の閉包を表わす）．$\overline{S_{b'}}=\mathcal{M}(A)$ となるから，$\overline{B}=\mathcal{M}(A)$．従って，$\forall\varphi\in S_b$ に対して，ある net $\{\varphi_j\}\subset S_b$ が存在して，$\varphi_j\to\varphi$ でかつ $\lim\sigma(m,\varphi_j)=1$ となる．故に，定理 C の (iii) から π_1^{-1} は φ において連続でない．すなわち，π_1^{-1} は S_b のすべての点において連続でない．定理 C の (v) ⇒ (ii) の証明から解るように，S_b は定理 C の (v) の (a) を満足しない．

文献

[1] A. Browder, Introduction to function algebras, W. A. Benjamin, New York, 1969.

[2] T. Gamelin, Uniform algebras, Prentice-Hall,

Englewood Cliffs, 1969.

[3] A. Gleason, Function algebras, Seminar in analytic functions, vol. II, Institute for Advanced Study, Princeton, 1957, 217 — 226.

[4] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular Banach algebras, Acta Math., 108 (1962), 291 — 317.

[5] K. Hoffman, Bounded analytic function and Gleason parts, Ann. of Math., 86 (1967), 74 — 111.

[6] K. Kishi. Analytic maps of the open unit disk onto a Gleason part, to appear.

[7] K. Kishi, Homeomorphism between the open unit disk and a Gleason part, to appear.

[8] H. König, On the Gleason and Harnack metrics for uniform algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 22 (1969), 100 — 101.

[9] J. Wermer, Dirichlet algebras, Duke Math. J., 27 (1960), 273 — 282.

[10] J. Wermer, Subspaces of C(X), Proc. Internat. Sym. Linear spaces, Jerusalem, 1960, Macmillan Pergamon, New York, 1961, 441 — 447.